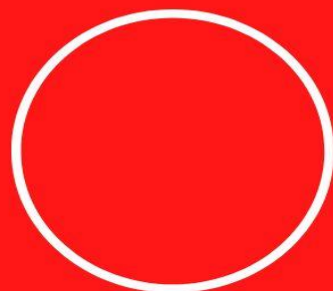
Fenômeno de Autoexcitação em Geradores de Energia Elétrica

Cláudio Homero F. da Silva
& Luiz Renato Gomes

Cláudio Homero Ferreira da Silva e Luiz Renato Gomes

Fenômeno de Autoexcitação em Geradores de Energia Elétrica

1ª Edição

Belo Horizonte
C. H. F da Silva e L. R. Gomes
2023

RESUMO

O fenômeno de autoexcitação em máquinas síncronas tem por razão os efeitos de ressonância elétrica aos quais estes equipamentos ficam sujeitos em função da presença de cargas indutivas associadas a cargas capacitivas. O resultado deste fenômeno pode ser acompanhado de fortes sobretensões tanto no campo quanto no estator da máquina. Esse fenômeno também pode ser agravado durante as oscilações no sistema interligado uma vez que o processo de ressonância tem a ver com a freqüência elétrica envolvida. Este artigo tem por objetivo apresentar uma análise sucinta do ponto de vista analítico para, posteriormente, calcular a faixa de risco operativo considerando o fenômeno da autoexcitação. Serão utilizadas as chamadas transformações ortogonais de Park, também conhecidas como transformações de Blondel, seu primeiro idealizador. Na realidade a transformação a ser utilizada será uma variante daquela que foi sugerida por Anderson [1].

Palavras-chave: Máquina síncrona; autoexcitação.

SUMÁRIO

1. Explanação Geral Acerca De Máquinas Síncronas

Ao se iniciar o estudo relativo à máquina síncrona, pode-se apresentar de início uma comparação direta entre as máquinas síncronas e outras máquinas rotativas.

Com relação às máquinas assíncronas ou máquinas de indução, outro tipo físico de máquina elétrica, pode-se afirmar que:

a) as máquinas síncronas, quando operam como gerador, fornecem, ao mesmo tempo, potência ativa e potência reativa, já o gerador assíncrono fornece apenas potência ativa, continuando como no motor assíncrono, a consumir potência reativa;

b) um gerador assíncrono consome em média, por característica, uma potência externa de aproximadamente 40% de sua potência nominal no processo de excitação o que inviabiliza sua utilização já que o processo de excitação de um gerador síncrono exige apenas uma potência da ordem de 1% para menos de sua potência nominal.

A máquina síncrona pode ser representada, esquematicamente, pela figura 1.

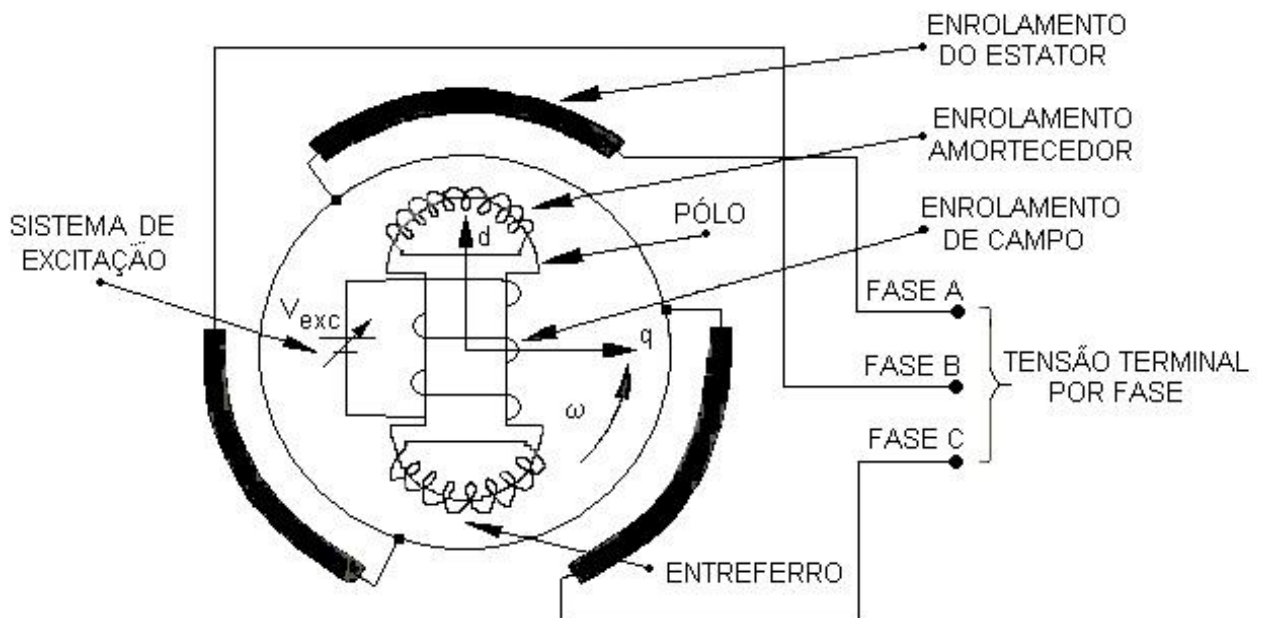



Figura 1 – Esquema Básico de uma Máquina Síncrona com um Par de Pólos e Ligação do Estator em Estrela.

Pode-se notar pela figura 1 que existem dois eixos, um na direção do pólo e outro em quadratura com este. O eixo na direção do pólo é chamado de eixo direto, ou apenas *d*, enquanto o outro é chamado de eixo em quadratura ou apenas *q*. Apenas lembrando que nesse caso, por questões didáticas, o estator se refere à parte fixa da máquina e o rotor à parte que se move com velocidade ω em relação ao estator.

Observar que este sistema de eixos *d-q*, idealizado, gira na mesma rotação do rotor, ou seja, com velocidade ω.

Como o torque mecânico é transferido através da rotação do rotor via eixo de acoplamento rotor/fonte de energia primária, quando em gerador síncrono, ou via eixo de acoplamento rotor/carga mecânica, quando em motor síncrono, existe um sincronismo entre o campo magnético de excitação e o torque mecânico que é desenvolvido neste eixo de acoplamento. Isso quer dizer que ambos os agentes, campo magnético e torque mecânico, deverão girar na mesma velocidade, portanto sincronizados em regime permanente. Esta é a razão de a máquina se chamar máquina síncrona.

Nota-se, também, que o sistema de eixos *d-q* gira sincronizado na freqüência de rotação do conjunto girante uma vez que se trata de eixos fictícios idealizados sobre o rotor da máquina. A idealização desse sistema de eixos vem ligada às facilidades de análise quando todas as grandezas, mesmo aquelas localizadas no estator, são referidas ao rotor, portanto aos eixos *d-q*. Estas transformações são clássicas no estudo da máquina síncrona e são conhecidas como transformações de Blondel, primeiro estudioso que as idealizou. Logo após, Park, Doherty, Nickle, entre outros estudiosos, apresentaram trabalhos nesta área. Nesse livro essas transformações serão chamadas apenas de transformações *d-q-0.*

O estudo da máquina síncrona, considerando-se as transformações de Blondel, será então desenvolvido de maneira fundamentada uma vez que sem esse conceito é difícil compreender perfeitamente o processo de regulação de tensão da máquina síncrona.

1.1. Enrolamento de Campo

O enrolamento de campo que envolve cada pólo cumpre o papel de, a partir de uma fonte de corrente contínua, que pode ser externa ou auto-alimentada, produzir o campo magnético indutor responsável pela excitação da máquina síncrona.

Em uma máquina síncrona com um par de pólos, por exemplo, nota-se que o fluxo magnético gerado em um dos lados do eixo polar é norte enquanto que do lado oposto o fluxo magnético gerado é sul. Em outras palavras, trata-se de um grande eletroímã. O enrolamento em si é constituído por espiras na forma de barras de cobre eletrolítico numa disposição retangular que envolve cada pólo de modo concentrado.

1.2. Estator

O estator da máquina síncrona, na sua forma padrão, constitui a parte estática que é varrida pelo fluxo magnético contínuo gerado no rotor. É formado pela carcaça, pelo núcleo magnético e pelos enrolamentos de fase da máquina.

O núcleo do estator, semelhantemente ao núcleo do rotor, é confeccionado de chapas de aço silicioso, ou seja, uma liga de aço com silício que apresenta alta permeabilidade magnética e baixas perdas, isoladas umas das outras e montadas segundo um alinhamento definido previamente através de pinos guia e presas por tirantes. O conjunto é chumbado na estrutura civil da instalação elétrica.

O enrolamento do estator é constituído de bobinas cujos condutores encontram-se alojados em ranhuras na sua parte interna. A estrutura final do anel magnético do estator termina em uma armação circular tendo na sua parte externa a carcaça e os trocadores de calor e em sua parte interna uma superfície dentada com as ranhuras que comportarão as bobinas. O estator da máquina síncrona também é conhecido como armadura da máquina.

1.3. Sistema de Excitação

Este sistema é responsável pela produção do fluxo magnético indutor a partir de uma fonte de corrente contínua podendo ser externa ou auto-alimentada que, no caso de grandes máquinas, se constitui de um controlador automatizado e que em pequenas máquinas pode ser composto de um sistema reostático controlado manualmente. Nas grandes instalações, esse sistema torna-se complexo e cumpre importantes ações que se refletem na própria estabilidade do sistema elétrico de potência, o SEP.

A tensão de corrente contínua de alimentação é levada ao enrolamento de campo através de escovas que se encontram em contato permanente com os anéis coletores.

Além daquilo que foi descrito até aqui, é importante lembrar que as máquinas síncronas se diferem quanto à construção do rotor e, por conseguinte, do enrolamento de campo.

2. Equações Da Máquina Síncrona

2.1. Geral

A máquina síncrona caracteriza o elemento representativo do processo sobre o qual vão atuar os órgãos de comando e controle para a obtenção do produto final, qual seja, a potência elétrica despachada a partir da potência motriz de entrada fornecida pela turbina.

Para o equacionamento da parte relativa à regulação de tensão, faz-se necessária a utilização da representação da máquina síncrona através de um equacionamento tal que venha a facilitar as análises e os estudos envolvidos.

O procedimento normal é a aplicação das chamadas transformações *d-q-0* que busca a conversão de grandezas estatóricas em grandezas rotóricas através da transformação de grandezas gerais em grandezas pseudo-estacionárias referidas a um sistema de eixos fixado sobre o rotor e que gira na mesma velocidade deste, velocidade síncrona, fazendo com isto que estas grandezas independam da rotação.

O fato consiste na criação de três eixos chamados *d-q-0*, ou mais propriamente, eixo direto, eixo em quadratura e eixo zero, sendo que os eixos *d* e *q* perfazem entre si um ângulo de 90 graus elétricos e se movimentando na velocidade síncrona, sendo o eixo zero um eixo estacionário simplesmente utilizado nas representações em que as condições desequilibradas são verificadas.

O processo visa à projeção das grandezas dos eixos estatóricos, aqui designados por *a-b-c* , segundo uma matriz de transformação particular, sobre aqueles eixos *d-q-0*, do rotor, e a partir daí obter o equacionamento de toda a dinâmica da máquina síncrona.

Com o estabelecimento do equacionamento básico relativo às indutâncias, segundo as influências próprias e mútuas dos enrolamentos envolvidos, serão equacionadas as funções de transferência das partes implicadas buscando-se com isto a definição do modelo da máquina síncrona.

Em cima da modelagem e da análise, detalhadas previamente, será possível a realização de diagnósticos sobre o comportamento operativo da máquina síncrona sob determinadas condições.

2.2. A Transformação d-q-0

Como já foi citada anteriormente, a idéia da utilização da transformação de grandezas estacionárias em grandezas pseudo-estacionárias teve seu embasamento matemático formulado na utilização de uma matriz de transformação, um método específico de tratamento matemático para essa questão.

A transformação a ser aqui utilizada se trata da transformação específica proposta por W A Lewis, ver referência 8.

Primeiramente será representada uma máquina síncrona composta de um par de pólos conforme está mostrado na figura 1.

Os eixos *d* e *q* giram com a velocidade síncrona do conjunto no sentido anti-horário. O eixo *d* encontra-se em fase com a direção do pólo enquanto o eixo *q* encontra-se em fase na direção 90 graus elétricos atrasados do eixo *d*, considerando-se o sentido de giro.

O diagrama fasorial para a máquina síncrona, anteriormente mostrado na figura 1, é apresentado na figura 2 considerando-se apenas a fase *a* do estator.

A equação básica da transformação *d-q-0* é a seguinte:

$$G_{dqo} = P\,G_{abc} \qquad (001)$$

Onde:

G: matriz das grandezas no sistema indicado;

P: matriz da transformação.

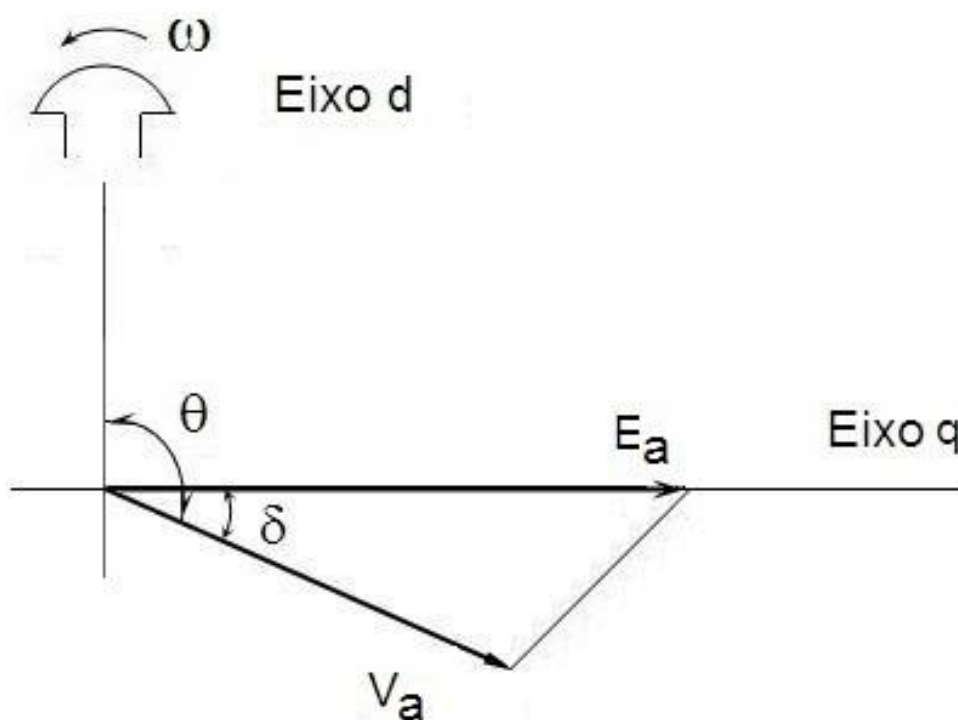



Figura 2 – Diagrama Vetorial da Máquina Síncrona para a Fase a

Na figura 2 considerar que o ângulo elétrico de giro do sistema seja dado pela seguinte expressão:

$$\theta(t) = \delta + \omega t + \frac{\pi}{2} \qquad (002)$$

onde ω é a rotação ou freqüência do conjunto girante, geralmente tomada como um valor fixo, síncrono e sob controle automático em função da presença do regulador de velocidade.
Em relação à figura 2, deve-se notar que essa representação expressa a posição momentânea dos vetores de tensão da máquina síncrona, mormente o vetor de tensão terminal da fase *a*, vetor v_a em relação ao vetor da tensão de excitação E_a que se encontra sobre o eixo *q*. Deste modo, num dado momento em que a localização do rotor fica definida, o vetor da tensão terminal relativa à fase *a* está localizado exatamente a um ângulo θ radianos elétricos atrás do eixo *d* cuja flecha positiva indica o sentido da fmm perpendicular ao plano de uma espira hipotética que concentraria toda a corrente gerada na fase *a* pelo processo de conversão eletrodinâmica da máquina elétrica. A equação 002 é bem clara nessa interpretação.

Nota: A partir desse ponto, no sentido de dar mais clareza e simplicidade ao equacionamento que será um tanto quanto trabalhoso, nas designações de grandezas variantes no domínio temporal será suprimida a denotação *(t)* como indicação de dependência da variável tempo.
Assim, a equação 002, de modo mais simplificado, tomará a seguinte forma:

$$\theta = \delta + \omega t + \frac{\pi}{2}$$

Considerando- se a matriz P, da transformação desejada, vem que:

$$P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \sin\theta & \sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \qquad (003)$$

A transformação *P*, aqui utilizada, trata-se de uma transformação ortogonal, ou seja, aquela que obedece à seguinte operação quando a inversa da matriz original é exatamente igual a sua transposta:

$$P^{-1} = P^{T} \qquad (004)$$

Portanto, para as correntes, para as tensões e para os fluxos magnéticos enlaçados, grandezas variantes no tempo e associadas à armadura da máquina síncrona e refletidas no sistema *d-q-0*, pode-se escrever, de forma matricial resumida, que:

$$i_{dqo} = P\, i_{abc} \tag{005}$$

$$v_{dqo} = P\, v_{abc} \tag{006}$$

$$\lambda_{dqo} = P\, \lambda_{abc} \tag{007}$$

A matriz inversa da matriz *P* de transformação é a seguinte:

$$P^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \cos\theta & \sin\theta \\ 1/\sqrt{2} & \cos(\theta - \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta - \frac{2}{3}\pi) \\ 1/\sqrt{2} & \cos(\theta + \frac{2}{3}\pi) & \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix} \tag{008}$$

A transformação escolhida garante a invariância da potência em ambos os sistemas *a-b-c* e *d-q-0* e para comprovar isso bastará considerar a expressão da potência instantânea, no domínio do tempo, deliberada por uma máquina síncrona operando como gerador.

Assim, vem que, levando-se em conta as tensões e correntes instantâneas de cada uma das fases do estator da máquina síncrona, variantes no tempo:

$$p = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c \tag{009}$$

Onde:*p*: potência instantânea total gerada;

$v_{a,b,c}$: tensões instantâneas de estator por fase;

$i_{a,b,c}$: correntes instantâneas de estator por fase.

De outra maneira, a equação 009 pode ser reescrita numa forma mais adequada para as operações matriciais futuras. Deste modo, tem-se que:

$$p = [v_{abc}]^T [i_{abc}] \tag{010}$$

Notar que as tensões e as correntes instantâneas de estator da máquina síncrona se distribuem na forma de uma matriz coluna, assim como tais entidades são denominadas na teoria. Isso quer dizer que:

$$[v_{abc}] = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = v_{abc} \tag{011}$$

e

$$[i_{abc}] = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = i_{abc} \tag{012}$$

Notar que na equação 010, a matriz coluna das tensões de fase teve de ser transposta para que a operação de multiplicação matricial tivesse consistência.

A partir das equações 005 e 006, podem-se escrever as seguintes equações, respectivamente para as correntes e as tensões de fase da máquina síncrona:

$$i_{abc} = P^{-1} i_{dqo} \quad \text{e} \quad v_{abc} = P^{-1} v_{dqo}$$

Levando-se as expressões anteriores, respectivamente para as correntes e para as tensões, na equação 010, vem que:

$$p = \left[P^{-1} v_{dqo}\right]^T \left[P^{-1} i_{dqo}\right] = [v_{dqo}]^T \left[P^{-1}\right]^T P^{-1} i_{dqo} \tag{013}$$

Uma importante observação relativa à transformação via matriz *P* é que ela se trata de uma transformação ortogonal, valendo então a relação da equação 013 anterior e as observações concernentes a esta.

A partir da matriz de transformação P, tem-se, para a equação 013 referente à potência total instantânea transferida pela máquina síncrona, que:

$$p = [v_{dqo}]^T P P^{-1} i_{dqo} = [v_{dqo}]^T i_{dqo} \tag{014}$$

Através do cálculo matricial anterior fica comprovada a invariância da potência na transformação *a-b-c – d-q-0*. Essa propriedade será fundamental para o estudo da transformação $G_{dqo} = P\, G_{abc}$ e *vice versa*.

Uma observação interessante: quando se trabalha com sistemas trifásicos equilibrados, as projeções das grandezas sobre o eixo *zero* tornam-se nulas uma vez que a existência desse eixo tem a ver apenas com a questão de um possível desequilíbrio entre as grandezas trifásicas.

2.3. Equação Geral dos Fluxos Enlaçados

Na figura 1, embora muito simples, podem-se verificar os enrolamentos que interferem no processo de trabalho de uma máquina síncrona.

Tendo em vista se tratar de uma máquina síncrona trifásica, notam-se os enrolamentos do estator, em número de três, o enrolamento de campo e os enrolamentos amortecedores.

Em todos estes enrolamentos aparecem os efeitos da indução própria e da indução mútua, uma vez que eles se interagem simultaneamente.

De uma maneira geral, podem-se equacionar os efeitos dos fluxos enlaçados segundo a relação matricial seguinte.

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{aF} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bF} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cF} & L_{cD} & L_{cQ} \\ L_{Fa} & L_{Fb} & L_{Fc} & L_{FF} & L_{FD} & L_{FQ} \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{DF} & L_{DD} & L_{DQ} \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & L_{QF} & L_{QD} & L_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \qquad (015)$$

Onde:

$\lambda_{a,b,c,F,D,Q}$: fluxos instantâneos enlaçados nos enrolamentos indicados pelos índices

$L_{a,b,c,F,D,Q}$: indutâncias de estator e rotor por fase

$i_{a,b,c,F,D,Q}$: correntes instantâneas de estator e rotor por fase

Considerar para a designação da indutância L_{ij} que:

$j=i$: para a indutância própria do enrolamento considerado;

$j \neq i$: para a indutância no enramamento *i* devido ao enrolamento *j*.

A equação matricial 015 anterior pode ser entendida como a representação linear entre correntes e fluxos o que confere linearidade nesse processo de equacionamento da máquina síncrona através de suas indutâncias.

2.4. Indutâncias Próprias e Mútuas do Estator

Para obtenção das fórmulas das indutâncias próprias e mútuas do estator de uma máquina síncrona considerar os cálculos cujos desenvolvimentos podem ser vistos na referência 6.

Simplesmente, as expressões são as seguintes:

$$L_{aa} = L_S + L_m \cos 2\theta \qquad (016)$$

Onde:

$$L_S = N_a^2 \frac{\Im_d + \Im_q}{2}$$

e

$$L_m = N_a^2 \frac{\Im_d - \Im_q}{2}$$

Nas equações anteriores considerar:

N_a : número de espiras da fase *a* do estator;

$\Im_d$: permeância magnética do eixo *d* do rotor;

$\Im_q$: permeância magnética do eixo *q* do rotor.

Portanto, L_{aa} possui uma parcela síncrona L_S e uma parcela dependente da velocidade dupla $L_m \cos 2\theta$.

Considerando as outras duas fases do estator da máquina síncrona, têm-se as seguintes expressões para as indutâncias próprias do estator:

$$L_{bb} = L_S + L_m \cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) \qquad (017)$$

$$L_{cc} = L_S + L_m \cos 2(\theta + \frac{2\pi}{3}) \qquad (018)$$

Para a indutância mútua tem-se que:

$$L_{ab} = L_{ba} = -M_S - L_m \cos 2(\theta + \frac{\pi}{6}) \qquad (019)$$

Onde:

$$M_S = N_a^2 \frac{\Im_d + \Im_q}{4}$$

e

$$L_m = N_a^2 \frac{\Im_d - \Im_q}{2}$$

Portanto L_{ab} ou L_{ba} possui uma parcela síncrona M_S e uma parcela dependente da velocidade dupla $L_m \cos 2(\theta + \frac{\pi}{6})$.

Utilizando da analogia com a equação 019 relativa à influência da fase *a* na fase *b*, considerando-se que as outras duas fases do estator da máquina síncrona devem receber tratamento matemático

semelhante, já que o sistema é considerado trifásico e equilibrado, tem-se para estas fases as seguintes expressões para as indutâncias mútuas do estator:

$$L_{bc} = L_{cb} = -M_S - L_m cos2(\theta - \frac{\pi}{2}) \tag{020}$$

$$L_{ca} = L_{ac} = -M_S - L_m cos2(\theta + \frac{5\pi}{6}) \tag{021}$$

2.5. Indutâncias Próprias e Mútuas do Rotor

As indutâncias próprias e mútuas do rotor independerão do ângulo θ de giro da máquina síncrona, referenciado na equação 002, uma vez que seus valores já se encontram vinculados aos eixos *d* e *q* relativos ao sistema de eixos já em movimento na velocidade síncrona.

Assim, para as indutâncias próprias do rotor, tem-se, considerando no rotor os enrolamentos amortecedores de eixo direto e de eixo em quadratura *D* e *Q,* respectivamente, e o enrolamento de campo apenas no eixo direto, enrolamento *F*, seguindo a designação mais comum na literatura.

Para o enrolamento de campo tem-se que:

$$L_{FF} = L_F \tag{022}$$

Para o enrolamento amortecedor de eixo direto:

$$L_{DD} = L_D \tag{023}$$

Para o enrolamento amortecedor de eixo em quadratura:

$$L_{QQ} = L_Q \tag{024}$$

Para as indutâncias mútuas tem-se que:

para campo e o enrolamento amortecedor *D*:

$$L_{FD} = L_{DF} = M_R \tag{025}$$

para campo e o enrolamento amortecedor *Q*:

$$L_{FQ} = L_{QF} = 0 \tag{026}$$

para os enrolamentos amortecedores *D* e *Q*:

$$L_{DQ} = L_{QD} = 0 \tag{027}$$

Nota: Nas equações 026 e 027, as indutâncias mútuas entre os enrolamentos *D* e *Q* e entre os enrolamentos *F* e *Q*, nesse sentido, são nulas, isso porque esses enrolamentos fictícios perfazem entre si um ângulo teórico de *90º*. O fluxo indutor da máquina síncrona é dado pela fórmula $\Phi = \oint_S \vec{B}.\hat{n}ds$, uma grandeza escalar do cálculo vetorial onde o integrando é o produto escalar do vetor indução magnética $\vec{B}$ pelo vetor relativo à área $d\vec{s} = \hat{n}ds$, um vetor normal à superfície *S* por onde o fluxo passa. Essa integral, para o presente caso, é nula uma vez que o ângulo envolvido vale *90º*.

2.6. Indutâncias Mútuas Entre Estator e Rotor

Considerando que a força eletromotriz, fem, gerada no enrolamento de campo apresenta apenas a componente de eixo direto, torna-se possível a obtenção das expressões para as indutâncias mútuas do estator com o enrolamento de campo.

$$L_{aF} = N_f^2 \Im_d \cos\theta \qquad (028)$$

ou simplesmente

$$L_{aF} = L_{Fa} = M_F \cos\theta \qquad (029)$$

Onde:

$M_F = N_f^2 \Im_d$

Analogamente, para as demais fases, tem-se que:

$$L_{bF} = L_{Fb} = M_F \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \qquad (030)$$

$$L_{cF} = L_{Fc} = M_F \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \qquad (031)$$

Para as indutâncias mútuas entre as fases do estator e o enrolamento amortecedor de eixo direto, tem-se, considerando a fase *a* e o enrolamento *D*:

$$L_{aD} = L_{Da} = M_D \cos\theta \qquad (032)$$

Onde:

$M_D = N_a^2 \Im_d$

Analogamente para as indutâncias mútuas entre as demais fases do estator e o enrolamento amortecedor de eixo direto, tem-se:

$$L_{bD} = L_{Db} = M_D \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \quad (033)$$

$$L_{cD} = L_{Dc} = M_D \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \quad (034)$$

Para as indutâncias mútuas entre as fases do estator e o enrolamento amortecedor de eixo em quadratura, *Q*, tem-se um caso análogo ao anterior, porém com a projeção executada sobre o eixo *q*.

Assim

$$L_{aQ} = L_{Qa} = M_Q \sin\theta \quad (035)$$

$$L_{bQ} = L_{Qb} = M_Q \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) \quad (036)$$

$$L_{cQ} = L_{Qc} = M_Q \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \quad (037)$$

Onde:

$M_Q = N_a^2 \Im_q$

2.7. Equações dos Fluxos Enlaçados e Desenvolvimento

Considerando-se a equação 015, relativa aos fluxos enlaçados envolvidos com a máquina síncrona, e em seus valores instantâneos, numa forma simbólica mais compacta, vem:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{a,b,c} \\ \lambda_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{EE} & L_{ER} \\ L_{RE} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a,b,c} \\ I_{F,D,Q} \end{bmatrix} \quad (038)$$

Multiplicando os membros da equação 038 pela matriz seguinte indicada na equação matricial obtém-se que:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{a,b,c} \\ \lambda_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{EE} & L_{ER} \\ L_{RE} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a,b,c} \\ I_{F,D,Q} \end{bmatrix} \quad (039)$$

Onde:

I é uma matriz unitária na dimensão 3x3 e P a matriz da transformação *d-q-0***.**

Promovendo as operações, inclusive a multiplicação do segundo membro da equação 040 pelo produto unitário matricial $P^{-1}P=1$, vem que:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{o,d,q} \\ \lambda_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{EE} & L_{ER} \\ L_{RE} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a,b,c} \\ I_{F,D,Q} \end{bmatrix} \quad (040)$$

E também:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{o,d,q} \\ \lambda_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{EE} & L_{ER} \\ L_{RE} & L_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{o,d,q} \\ I_{F,D,Q} \end{bmatrix} \quad (041)$$

A equação matricial 041 encontra-se numa forma compactada. Descompactando-a obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & KM_F & KM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & KM_Q \\ 0 & KM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & KM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & KM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (042)$$

Onde:

$$K = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$L_d = L_s + M_s + \frac{3}{2} L_m$$

$$L_q = L_s + M_s - \frac{3}{2} L_m$$

$$L_0 = L_s - 2M_s$$

2.8. Equações das Tensões

O esquema do diagrama da figura 3 mostra os circuitos dos enrolamentos componentes de uma máquina síncrona real operando como gerador.

Considerando o esquema da figura 3, segue então a equação matricial compactada das tensões envolvidas na máquina síncrona, em seus valores instantâneos. O ponto sobre a grandeza indica derivada desta em relação ao tempo.

$$v - v_n + ri + \dot{\lambda} = 0 \qquad (043)$$

De maneira expandida, a equação matricial anterior toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ \hline -v_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_n \\ \hline 0 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{ccc|ccc} r_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_c & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ \hline i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_a \\ \dot{\lambda}_b \\ \dot{\lambda}_c \\ \hline \dot{\lambda}_F \\ \dot{\lambda}_D \\ \dot{\lambda}_Q \end{bmatrix} = 0 \qquad (044)$$

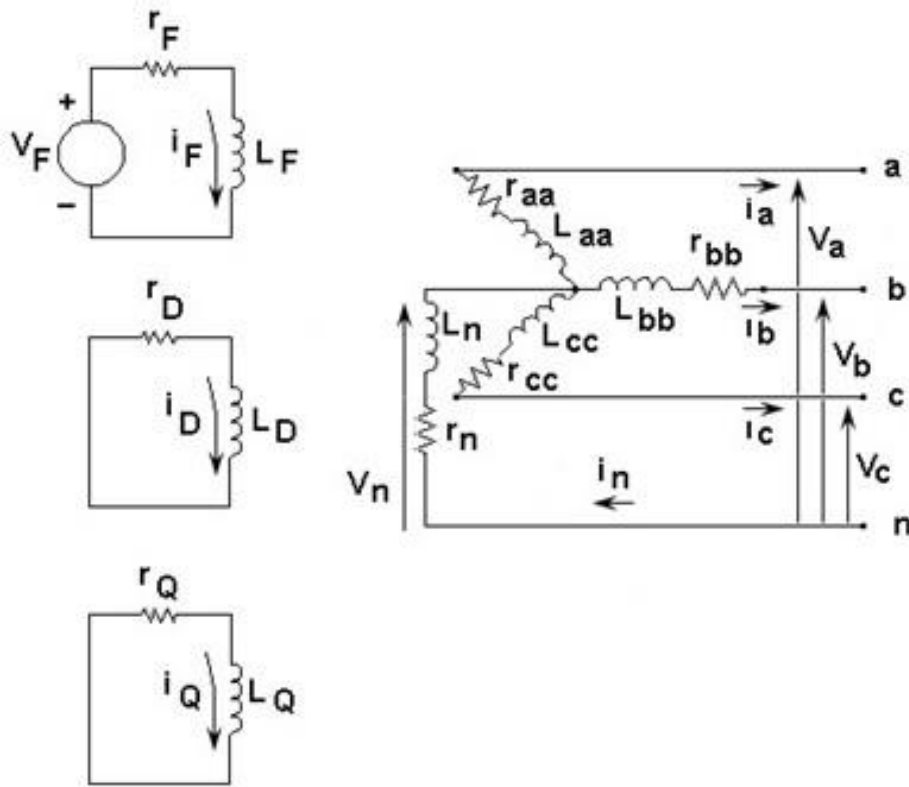



Figura 3 – Enrolamentos Reais da Máquina Síncrona

Na figura 3 considerar, além das variáveis e parâmetros conhecidos e já definidos anteriormente, a seguinte legenda:

$r_{aa,bb,cc,F,D,Q}$: resistências dos enrolamentos;

v_F : tensão instantânea de campo;

i_n : corrente instantânea de neutro

r_n : resistência de neutro do estator;

L_n : indutância de neutro do estator.

Para determinação da matriz v_n relativa às correntes envolvidas tem-se:

$$v_n = -\begin{bmatrix} r_n & r_n & r_n \\ r_n & r_n & r_n \\ r_n & r_n & r_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_n & L_n & L_n \\ L_n & L_n & L_n \\ L_n & L_n & L_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{i}_b \\ \dot{i}_c \end{bmatrix} \quad (045)$$

De maneira mais resumida, a equação 045 toma a seguinte forma mais compacta:

$$V_n = -R_n\, i_{a,b,c} - L_n\, \dot{i}_{a,b,c} \quad (046)$$

De maneira compacta, a equação 043 poderá ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} v_{a,b,c} \\ v_{F,D,Q} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{a,b,c} & 0 \\ 0 & R_{F,D,Q} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{a,b,c} \\ i_{F,D,Q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{a,b,c} \\ \dot{\lambda}_{F,D,Q} \end{bmatrix} = 0 \quad (047)$$

Aplicando a transformação *d-q-0* à equação 047 vem que:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{a,b,c} \\ v_{F,D,Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0,d,q} \\ v_{F,D,Q} \end{bmatrix} \quad (048)$$

Considerando, a partir daqui, toda a dedução algébrica que pode ser vista nas referências 1 e 6, obtém-se a seguinte equação matricial das tensões instantâneas em função das correntes instantâneas relativas aos enrolamentos da máquina síncrona.

$$\begin{bmatrix} v_o \\ v_d \\ v_q \\ -v_F \\ v_D = 0 \\ v_Q = 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_a + 3r_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_b & \omega L_q & 0 & 0 & \omega KM_Q \\ 0 & -\omega L_d & r_c & -\omega M_F & -\omega KM_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} L_0 + 3L_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & KM_F & KM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & KM_Q \\ 0 & KM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & KM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & KM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{i}_o \\ \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_F \\ \dot{i}_D \\ \dot{i}_Q \end{bmatrix} = 0 \quad (049)$$

Utilizando a equação 049, pode-se representar o circuito equivalente para uma máquina síncrona, como se vê na figura 4, com $r_a = r_b = r_c = r$, uma vez que todo projetista de máquina síncrona persegue esta condição.

Pela figura 4, pode-se perceber, no circuito dos eixos *d* e *q*, a presença de duas tensões que são proporcionais ao movimento atual de rotação do conjunto e que são chamadas tensões de rotação. Portanto, as relações obtidas não são lineares, mas, por aproximação, tomando-se a velocidade de rotação ω como constante, uma vez que a máquina síncrona dispõe um regulador de velocidade, o problema fica resolvido obtendo-se a linearização procurada. Lembrar que é mais prático e conveniente se trabalhar com equações lineares.

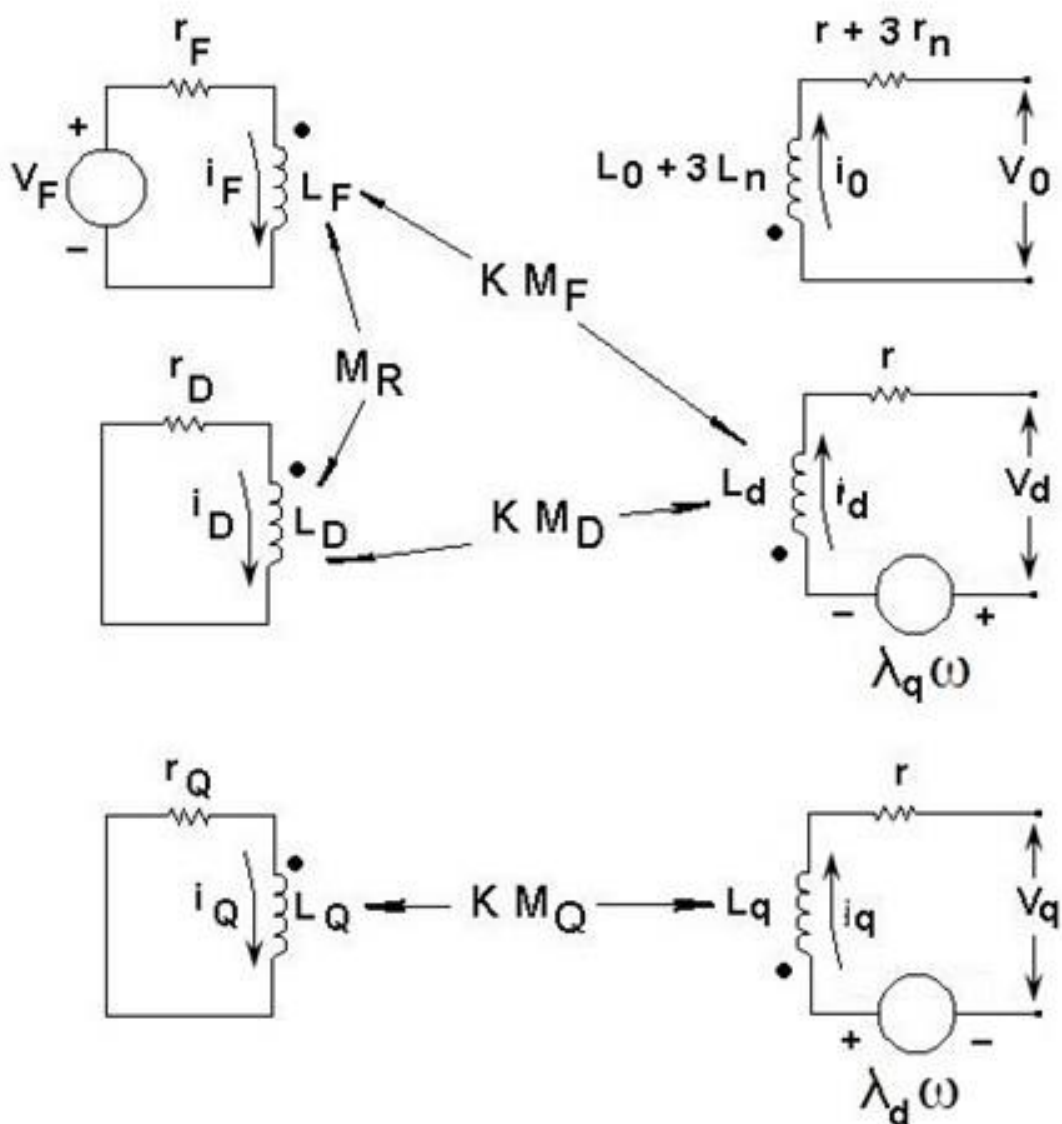



Figura 4 – Circuito Equivalente da Máquina Síncrona

2.9. Valores em Por Unidade no Estudo da Máquina Síncrona

Cabe aqui uma observação, para a utilização das equações da máquina síncrona em por unidade há necessidade de se proceder à normalização das grandezas envolvidas no processo.

Para a normalização das grandezas utilizadas deverá ser adotado um referencial baseado no rotor, proposição feita por alguns autores apesar da escolha depender de certos critérios.

Os fluxos enlaçados mútuos dependem da parcela mútua das indutâncias que compõem o sistema magnético da máquina síncrona.

Considerando as parcelas do fluxo mútuo e do fluxo de dispersão, por definição, pode-se escrever a seguinte expressão para o valor total da indutância de eixo direto da máquina síncrona, primeiro caso a ser visto e a ser seguido daqui para frente neste tópico.

$$L_d = L_{md} + L_{dd} \qquad (050)$$

onde

L_{md} : indutância mútua útil referente ao eixo d;
L_{md} : indutância de dispersão útil referente ao eixo d.

A indutância de dispersão tem a ver com o fluxo perdido no entreferro.

Assim, ficam definidas, para todas as indutâncias em jogo, as relações seguintes referentes às parcelas úteis de cada uma em seu respectivo enrolamento conforme é mostrado na figura 4:

$$\begin{aligned} L_{md} &= L_d - L_{dd} \\ L_{mq} &= L_q - L_{dq} \\ L_{mF} &= L_F - L_{dF} \\ L_{mD} &= L_D - L_{dD} \\ L_{mQ} &= L_Q - L_{dQ} \end{aligned} \qquad (051)$$

As relações elementares para um determinado valor de fluxo enlaçado λ_B, aqui tomado como um valor base que construirá a base de valores a ser escolhida no processo de normalização envolvendo outras grandezas tais como a tensão base V_B, a indutância base L_B , a corrente base I_B e rotação base ω_B, são as seguintes:

$$\lambda_B = L_B I_B \qquad (052)$$

$$\lambda_B = \frac{V_B}{\omega_B} = L_B I_B \qquad (053)$$

com

$$\omega_B = \frac{1}{t_B} \qquad (054)$$

Notar que a equação 054 define uma grandeza que não deve ser confundida, trata-se do tempo base que é exatamente o inverso da velocidade angular elétrica, o que para o sistema elétrico nacional, SIN, tem seu valor aproximado para $\omega_B = 2\pi 60 = 377\ rad/s$.

As seguintes premissas serão obedecidas:

$S_B = V_B I_B$ → potência para sistemas monofásicos;

$S_B = \sqrt{3} V_B I_B$ → potência total para sistemas trifásicos.

Onde:

S_B : MVA monofásico de base para sistemas monofásicos;

S_B: MVA trifásico de base para sistemas trifásicos.

Podem-se então definir, a partir de certas condições, as grandezas básicas do rotor.

Assim, tem-se que:

$$\lambda_{md} = L_{md} I_B = KM_F I_{FB} = KM_D I_{DB}$$
$$\lambda_{mF} = KM_F I_B = L_{mF} I_{FB} = M_R I_{DB}$$
$$\lambda_{mD} = KM_D I_B = M_R I_{FB} = L_{mD} I_{DB}$$
$$\lambda_{mq} = L_{mq} I_B = KM_Q I_{QB}$$
$$\lambda_{mQ} = KM_Q I_B = L_{mQ} I_{QB} \qquad (055)$$

Nas equações 055, a idéia foi obter uma escolha de correntes base que, a partir da corrente base circulante por um determinado enrolamento, através de sua indutância própria útil, fosse possível obter uma corrente induzida base nos outros enrolamentos por esse primeiro enrolamento influenciado por intermédio das indutâncias mútuas.

Exemplo 1

Utilizando-se das equações 055, provar que as indutâncias mútuas em pu KM_{FU} e KM_{DU} são iguais.

Solução:

Das equações 055, podem-se escrever as seguintes relações:

$$\lambda_{md} = L_{md}\, I_B = KM_F\, I_{FB} = KM_D\, I_{DB}$$

Tomando-se a última igualdade tem-se:

$$KM_F\, I_{FB} = KM_D\, I_{DB} \quad \therefore \quad \frac{KM_F}{KM_D} = \frac{I_{DB}}{I_{FB}} \qquad (056)$$

Porém, sabe-se ainda da equação 053 que:

$$KM_{FB} = \frac{V_B}{\omega_B I_{FB}} \quad \therefore \quad I_{FB} = \frac{V_B}{\omega_B KM_{FB}} \qquad (057)$$

$$KM_{DB} = \frac{V_B}{\omega_B I_{DB}} \quad \therefore \quad I_{DB} = \frac{V_B}{\omega_B KM_{DB}} \qquad (058)$$

Levando na equação 056 as expressões encontradas nas equações 057 e 058 para as correntes de base I_{FB} e I_{DB}, obtém-se:

$$\frac{KM_F}{KM_D} = \frac{\dfrac{V_B}{\omega_B KM_{DB}}}{\dfrac{V_B}{\omega_B KM_{FB}}} = \frac{KM_{FB}}{KM_{DB}} \quad \therefore \quad \frac{KM_F}{KM_{FB}} = \frac{KM_D}{KM_{DB}} \quad \therefore \quad KM_{FU} = KM_{DU}$$

Por analogia ao resultado obtido anteriormente, pode-se generalizar para os circuitos dos eixos *d* e *q* da máquina síncrona que:

$$L_{mdu} = L_{mFu} = L_{mDu} = KM_{FU} = KM_{DU} = M_{RU}$$

$$L_{mqu} = L_{mQu} = KM_{QU} \qquad (059)$$

As equações 059 são de extrema importância quando da elaboração dos circuitos equivalentes de eixos *d* e *q*, em pu, da máquina síncrona.

Nota a respeito do exemplo 1: Observar sempre que, na definição dos valores base para as indutâncias KM_{FB} e KM_{DB}, nas equações 057 e 058, a tensão base se refere ao enrolamento em questão, porém a corrente base se refere ao enrolamento que criou o fluxo magnético. Essa proposta de base de valores é assim adotada para que os valores em pu das indutâncias mútuas sejam iguais, uma particularidade opcional visando à obtenção de facilidades para futuros cálculos.

Exemplo 2

Comprovar as equações 055 a partir de uma condição genérica.

Solução:

Para a comprovação propriamente dita, será utilizado nas variáveis um subscrito, apenas nesse exemplo, para que fique bem indicado a qual dos circuitos equivalentes *d*, *D*, *F*, *q*, *Q* o cálculo se refere.

Imaginando uma escolha genérica para as correntes de base circulantes, tem-se o seguinte raciocínio.

a) enrolamento *d*

Os fluxos enlaçados vistos do enrolamento *d* serão os seguintes então:

$$\lambda_{md_d} = L_{md} I_B$$
$$\lambda_{mF_d} = L_{mF} I_{FB} \qquad (060)$$
$$\lambda_{mD_d} = L_{mD} I_{DB}$$

Para os três fluxos anteriores, a tensão base será sempre a tensão referente ao eixo *d*, ou seja, V_B, já que o efeito se dá no enrolamento de estator.

Tomando-se os valores em pu para cada um dos três fluxos enlaçados da equação 060 vem que:

$$\lambda_{md_{du}} = \frac{\lambda_{md_d}}{\lambda_{md_{dB}}} = \frac{L_{md} I_B}{L_{mdB} I_B} = \frac{L_{md}}{L_{mdB}} \qquad (061)$$

A indutância base referente ao eixo *d* é dada por:

$$L_{mdB} = \frac{V_B}{\omega_B I_B} \qquad (062)$$

Com a expressão anterior, a equação 061 pode ser assim reescrita:

$$\lambda_{md_{du}} = \frac{\omega_B I_B}{V_B} L_{md} \qquad (063)$$

Por analogia, os fluxos enlaçados para λ_{mFdu} e λ_{mDdu} serão:

$$\lambda_{mF_{du}} = \frac{\omega_B I_{FB}}{V_B} KM_F \quad (064)$$

e

$$\lambda_{mD_{du}} = \frac{\omega_B I_{DB}}{V_B} KM_D \quad (065)$$

Para que, por suposição, os fluxos enlaçados em pu, relativos ao eixo em questão, sejam iguais, as seguintes relações deverão ser cumpridas:

$$\lambda_{md_{du}} = \lambda_{mF_{du}} = \lambda_{mD_{du}} \quad (066)$$

Deste modo, tem-se então que:

$$I_B L_{md} = I_{FB} KM_F = I_{DB} KM_D = \lambda_{md} \quad (067)$$

b) enrolamento *q*

Estendendo o raciocínio para o enrolamento *q* vem:

$$I_B L_{mq} = I_{QB} KM_Q = \lambda_{mq} \quad (068)$$

c) enrolamento *F*

Para o enrolamento de campo, em termos de fluxo magnético enlaçado, considerando-se a circulação da corrente base desse enrolamento, tem-se que:

$$\lambda_{mF_F} = L_{mF} I_{FB}$$

Tomando o valor em pu para fluxo magnético enlaçado desse enrolamento, obtém-se:

$$\lambda_{mF_{Fu}} = \frac{L_{mF} I_{FB}}{L_{mFB} I_{FB}} \quad (069)$$

A indutância base referente ao eixo *F* é dada por:

$$L_{mFB} = \frac{V_{FB}}{\omega_B I_{FB}} \quad (070)$$

Com a expressão anterior, a equação 069 pode ser assim reescrita:

$$\lambda_{mF_{Fu}} = \frac{\omega_B I_{FB}}{V_{FB}} L_{mF} \quad (071)$$

Por analogia, os fluxos enlaçados para λ_{mdFu} e λ_{mDdu} serão:

$$\lambda_{md_{Fu}} = \frac{\omega_B I_B}{V_{FB}} KM_F \quad (072)$$

e

$$\lambda_{mD_{Fu}} = \frac{\omega_B I_D}{V_{FB}} M_R \quad (073)$$

Também aqui, para que, por suposição, os fluxos enlaçados em pu, relativos ao eixo em questão, sejam iguais, as seguintes relações deverão ser cumpridas:

$$\lambda_{md_{Fu}} = \lambda_{mF_{Fu}} = \lambda_{mD_{Fu}} \quad (074)$$

Deste modo também, tem-se então que:

$$I_{FB} L_{mF} = I_B KM_F = I_{DB} M_R = \lambda_{mF} \quad (075)$$

d) enrolamentos *D* e *Q*

Por analogia, podem-se escrever as seguintes equações para os fluxos enlaçados nesses enrolamentos:

$$I_{DB} L_{mD} = I_B KM_D = I_{FB} M_R = \lambda_{mD} \quad (076)$$

e

$$I_{QB} L_{mQ} = I_B KM_Q = \lambda_{mQ} \quad (077)$$

Ficando, deste modo, comprovadas as equações 065.

Nota a respeito do exemplo 2: Multiplicando-se as equações 067, 075 e 076, relativas ao eixo *d*, respectivamente, por I_B, I_{FB} e I_{DB}, vem que:

$$\lambda_{md} I_B = L_{md} I_B^2 = KM_F I_{FB} I_B = KM_D I_{DB} I_B \qquad (078)$$

e

$$\lambda_{mF} I_{FB} = KM_F I_B I_{FB} = L_{mF} I_{FB}^2 = M_R I_{FB} I_{DB} \qquad (079)$$

e

$$\lambda_{mD} I_{DB} = KM_D I_B I_{DB} = M_R I_{FB} I_{DB} = L_{mD} I_{DB}^2 \qquad (080)$$

Do mesmo modo para o eixo *q*, multiplicando-se as equações 068 e 077, respectivamente, por I_B e I_{QB}, vem que:

$$\lambda_{mq} I_B = L_{mq} I_B^2 = KM_Q I_{QB} I_B \qquad (081)$$

e

$$\lambda_{mQ} I_{QB} = KM_Q I_B I_{QB} = L_{mQ} I_{QB}^2 \qquad (082)$$

Por uma imposição do problema, as equações 078, 079 e 080, relativas ao eixo *d*, são iguais, logo vale a seguinte relação primordial:

$$L_{md} I_B^2 = L_{mF} I_{FB}^2 = L_{mD} I_{DB}^2 = KM_F I_{FB} I_B = KM_D I_{DB} I_B = M_R I_{FB} I_{DB} \qquad (083)$$

Do mesmo modo para o eixo *q*, as equações 081 e 082 são iguais, logo vale a outra relação primordial:

$$L_{mq} I_B^2 = L_{mQ} I_{QB}^2 = KM_Q I_{QB} I_B \qquad (084)$$

As equações 078, 079, 080, 081 e 082, chamadas aqui de equações primordiais, são relações que confirmam que as potências desenvolvidas nos diferentes enrolamentos dos eixos *d* e *q* da máquina síncrona, em termos dos valores base escolhidos nesse contexto, são iguais.
Na realidade, as equações 055 são uma conseqüência da condição imposta relativa à conservação da energia entre os enrolamentos dos eixos *d* e *q* da máquina síncrona.

Considerando as equações 083 e 084, além de se manter a mesma potência base de valores, podem-se escrever, para os três enrolamentos do rotor, as seguintes expressões:

$$\frac{I_{FB}}{I_B} = \frac{V_B}{V_{FB}} = \sqrt{\frac{L_{md}}{L_{mF}}} = \frac{L_{md}}{KM_F} = \frac{KM_F}{L_{mF}} = \frac{KM_D}{M_R} = K_F \quad (085)$$

$$\frac{I_{DB}}{I_B} = \frac{V_B}{V_{DB}} = \sqrt{\frac{L_{md}}{L_{mD}}} = \frac{L_{md}}{KM_D} = \frac{KM_D}{L_{mD}} = \frac{KM_F}{M_R} = K_D \quad (086)$$

$$\frac{I_{QB}}{I_B} = \frac{V_B}{V_{QB}} = \sqrt{\frac{L_{mq}}{L_{mQ}}} = \frac{L_{mq}}{KM_Q} = \frac{KM_Q}{L_{mQ}} = K_Q \quad (087)$$

Assim, as variáveis de corrente de base e de tensão de base são escolhidas de modo que em qualquer enrolamento a potência base seja sempre a mesma.

Portanto, conhecendo-se L_B e R_B, das bases do estator, vem:

$$\frac{R_{FB}}{R_B} = \frac{1}{K_F^2} \quad , \quad \frac{R_{DB}}{R_B} = \frac{1}{K_D^2} \quad , \quad \frac{R_{QB}}{R_B} = \frac{1}{K_Q^2} \quad (088)$$

$$\frac{L_{FB}}{L_B} = \frac{1}{K_F^2} \quad , \quad \frac{L_{DB}}{L_B} = \frac{1}{K_D^2} \quad , \quad \frac{L_{QB}}{L_B} = \frac{1}{K_Q^2} \quad (089)$$

E para as indutâncias mútuas será utilizada uma propriedade extraída da equação 085, senão veja-se.

$$\frac{L_{md}}{KM_F} = \frac{KM_F}{L_{mF}} \quad \therefore \quad KM_F^2 = L_{md} L_{mF} \quad (090)$$

Nota: Nessa propriedade, nota-se que, considerando o efeito mútuo entre dois circuitos magneticamente conectados, o produto das indutâncias próprias úteis de cada circuito elétrico é igual ao quadrado da indutância mútua verificada entre ambos. Deste modo, por conseqüência, levando-se em conta uma base de valores previamente definida, o quadrado do valor da indutância mútua base entre dois circuitos magneticamente conectados será igual ao produto dos valores das indutâncias próprias base de cada um dos circuitos envolvidos.

Assim:

$$M_{FB}^2 = L_B L_{FB} \quad \therefore \quad \frac{M_{FB}}{L_B} = \frac{L_{FB}}{M_{FB}} \quad (091)$$

Mas, da equação 085, tem-se que $\frac{L_{md}}{KM_F} = K_F$ em valores atuais o que permite escrever em valores base que:

$$\frac{M_{FB}}{L_B} = \frac{1}{K_F} \qquad (092)$$

Mas, da equação 086, tem-se que $\frac{L_{md}}{KM_D} = K_D$ em valores atuais o que permite escrever em valores base que:

$$\frac{M_{DB}}{L_B} = \frac{1}{K_D} \qquad (093)$$

Mas, da equação 087, tem-se que $\frac{L_{mq}}{KM_Q} = K_Q$ em valores atuais o que permite escrever em valores base que:

$$\frac{M_{QB}}{L_B} = \frac{1}{K_Q} \qquad (094)$$

Da equação 085 tem-se que:

$$\frac{KM_D}{M_R} = K_F \;\therefore\; \frac{L_{md}}{L_{md}}\frac{KM_D}{M_R} = K_F \;\therefore\; \frac{M_R}{L_{md}} = \frac{1}{K_F}\frac{KM_D}{L_{md}} \qquad (095)$$

Da equação 086 tem-se que:

$$\frac{KM_D}{L_{md}} = \frac{1}{K_D} \qquad (096)$$

Logo, a partir da equação 095, obtém-se para a equação 096 que:

$$\frac{M_R}{L_{md}} = \frac{1}{K_F K_D} \qquad (097)$$

Em termos de relação base, a partir da equação 097, vem que:

$$\frac{M_{RB}}{L_B} = \frac{1}{K_F K_D} \qquad (098)$$

A equação 098 completa o conjunto de equações envolvendo os valores base fornecendo o caminho para o cálculo das demais relações.

2.10. Equações em Por Unidade

Colocando a equação matricial 049, que se encontra em valores atuais, em por unidade obtém-se que:

$$\begin{bmatrix} V_B\,v_{0u} \\ V_B\,v_{du} \\ V_B\,v_{qu} \\ -V_{FB}\,v_{Fu} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_0+3r_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & \omega L_q & 0 & 0 & \omega KM_Q \\ 0 & -\omega L_d & r & -\omega kM_F & -\omega KM_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_B\,i_{0u} \\ I_B\,i_{du} \\ I_B\,i_{qu} \\ I_{FB}\,i_{Fu} \\ I_{DB}\,i_{Du} \\ I_{QB}\,i_{Qu} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} L_0+3L_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & KM_F & KM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & KM_Q \\ 0 & KM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & KM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & KM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_B\,\dot{i}_{0u} \\ I_B\,\dot{i}_{du} \\ I_B\,\dot{i}_{qu} \\ I_{FB}\,\dot{i}_{Fu} \\ I_{DB}\,\dot{i}_{Du} \\ I_{QB}\,\dot{i}_{Qu} \end{bmatrix} = 0$$

(099)

Analisando cada uma das tensões do vetor tensão, em separado, iniciando-se pelo eixo *d*, vem que:

$$v_{du} + r\frac{I_B}{V_B}i_{du} + \omega L_q\frac{I_B}{V_B}i_{qu} + \omega KM_Q\frac{I_{QB}}{V_B}i_{Qu} + L_d\frac{I_B}{V_B}\dot{i}_{du} + KM_F\frac{I_{FB}}{V_B}\dot{i}_{Fu} + KM_D\frac{I_{DB}}{V_B}\dot{i}_{Du} = 0 \qquad (100)$$

Sabe-se que $\frac{1}{L_B\,\omega_B} = \frac{I_B}{V_B}$**,** assim a equação 100 se transforma na equação 101.

$$v_{du} + r_u i_{du} + \omega_u L_{qu} i_{qu} + \omega_u KM_{Qu} i_{Qu} + \frac{L_{du}}{\omega_B}\dot{i}_{du} + \frac{KM_{Fu}}{\omega_B}\dot{i}_{Fu} + \frac{KM_{Du}}{\omega_B}\dot{i}_{Du} = 0 \qquad (101)$$

Analogamente, para o eixo *q*, vem:

$$v_{qu} - \omega_u L_{du} i_{du} + r_u i_{qu} - \omega_u KM_{Fu} i_{Fu} - \omega_u KM_{Du} i_{Du} + \\ + \frac{L_{qu}}{\omega_B} \dot{i}_{qu} + \frac{KM_{Qu}}{\omega_B} \dot{i}_{Qu} = 0 \qquad (102)$$

Para o circuito de seqüência zero vem que:

$$v_{ou} + (r + 3r_n) \frac{I_B}{V_B} i_{ou} + (L_o + 3L_n) \frac{I_B \omega_B}{V_B \omega_B} i_{ou} = 0$$

Assim, obtém-se a seguinte expressão:

$$v_{ou} + R_{ou} i_{ou} + \frac{L_{ou}}{\omega_B} \dot{i}_{ou} = 0 \qquad (103)$$

onde $R_{ou} = \frac{(r + 3r_n)}{V_B} I_B$ e $L_{ou} = \frac{(L_0 + 3L_n)}{V_B} I_B \omega_B$

Para o circuito de campo vem:

$$v_{Fu} - r_{Fu} i_{Fu} - \frac{KM_{Fu}}{\omega_B} \dot{i}_{du} - \frac{L_{Fu}}{\omega_B} \dot{i}_{Fu} - \frac{M_{RU}}{\omega_B} \dot{i}_{Du} = 0 \qquad (104)$$

E, para os enrolamentos amortecedores, tem-se:

$$r_{Du} i_{Du} + \frac{KM_{Du}}{\omega_B} \dot{i}_{du} + \frac{M_{Ru}}{\omega_B} \dot{i}_{Fu} + \frac{L_{Du}}{\omega_B} \dot{i}_{Du} = 0 \qquad (105)$$

$$r_{Qu} i_{Qu} + \frac{KM_{Qu}}{\omega_B} \dot{i}_{qu} + \frac{L_{Qu}}{\omega_B} \dot{i}_{Qu} = 0 \qquad (106)$$

Colocando as equações 101, 102, 103, 104, 105 e 106 na forma matricial completa, e normalizando o tempo nas parcelas que apresentam derivadas, obtém-se que:

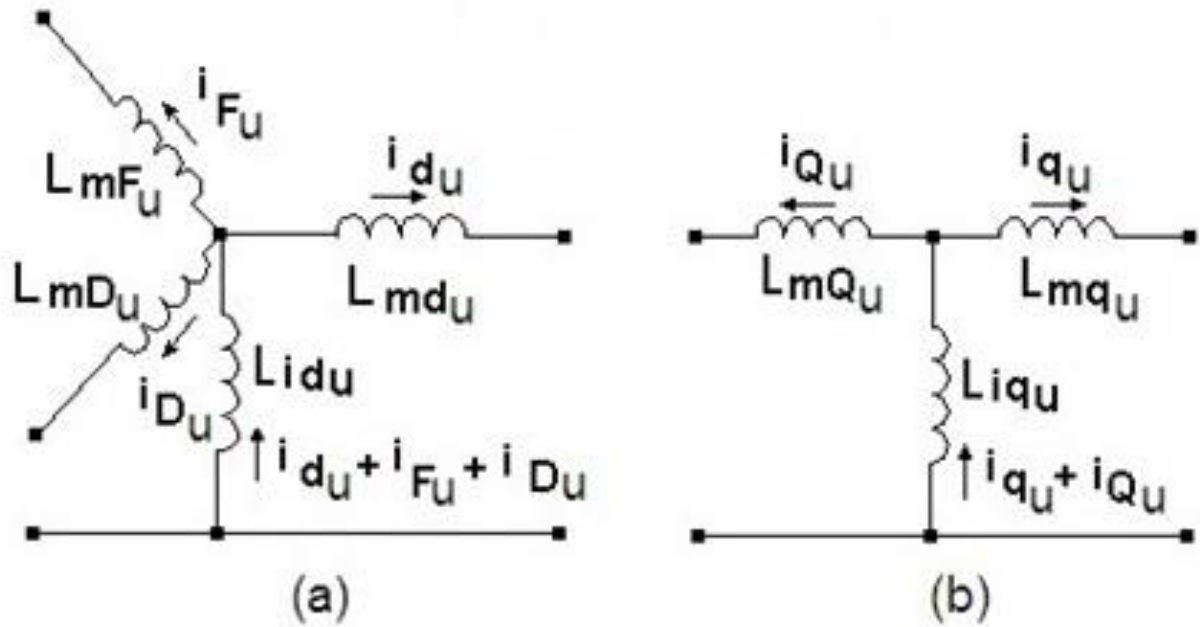



Figura 5 – Circuito PU Equivalente de Correntes da Máquina Síncrona para (a) Eixo d, (b) Eixo q

$$\begin{bmatrix} v_{Ou} \\ v_{du} \\ v_{qu} \\ \hdashline -v_{Fu} \\ v_{Du}=0 \\ v_{Qu}=0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{Ou} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_u & L_{qu} & 0 & 0 & KM_{Qu} \\ 0 & -L_{du} & r_u & -kM_{Fu} & -KM_{Du} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & r_{Fu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{Du} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{Qu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{Ou} \\ i_{du} \\ i_{qu} \\ \hdashline i_{Fu} \\ i_{Du} \\ i_{Qu} \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{\omega_B} \begin{bmatrix} L_{Ou} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{du} & 0 & KM_{Fu} & KM_{Du} & 0 \\ 0 & 0 & L_{qu} & 0 & 0 & KM_{Qu} \\ \hdashline 0 & KM_{Fu} & 0 & L_{Fu} & M_{Ru} & 0 \\ 0 & KM_{Du} & 0 & M_{Ru} & L_{Du} & 0 \\ 0 & 0 & KM_{Qu} & 0 & 0 & L_{Qu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_{Ou} \\ \dot{i}_{du} \\ \dot{i}_{qu} \\ \hline \dot{i}_{Fu} \\ \dot{i}_{Du} \\ \dot{i}_{Qu} \end{bmatrix} = 0 \tag{107}$$

2.11. Circuito Equivalente da Máquina Síncrona

Como condição a ser obedecida nos desenvolvimentos que se seguem, deve-se levar em conta que o sistema é equilibrado eletricamente com $i_0 = 0$. A base de valores escolhida é aquela descrita no item 2.10, precedente, cuja escolha partiu de certas premissas a fim de se fazer com que as indutâncias mútuas fossem iguais em seus valores em pu.

Os fluxos enlaçados da máquina síncrona, assim como foi visto no item 2.9, podem ser relacionados, em pu, com os fluxos mútuos e os fluxos de dispersão, respectivamente, de modo que se pode escrever de maneira genérica que:

$$\lambda_{Tu} = \lambda_{du} + \lambda_{mu} \tag{108}$$

ou seja, o fluxo enlaçado total λ_T , de um determinado circuito magnético, é a soma dos fluxos de dispersão λ_d e mútuo λ_m, desse mesmo circuito.

Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\lambda_{Tdu} &= \lambda_{ddu} + \lambda_{mdu} = L_{ddu} i_{du} + L_{mdu} i_{du} + KM_{Fu} i_{Fu} + KM_{Du} i_{Du} \\
\lambda_{Tqu} &= \lambda_{dqu} + \lambda_{mqu} = L_{dqu} i_{qu} + L_{mqu} i_{qu} + KM_{Qu} i_{Qu} \\
\lambda_{TFu} &= \lambda_{dFu} + \lambda_{mFu} = L_{dFu} i_{Fu} + L_{mFu} i_{Fu} + KM_{Fu} i_{du} + M_{Ru} i_{Du} \\
\lambda_{TDu} &= \lambda_{dDu} + \lambda_{mD} u = L_{dDu} i_{Du} + L_{mDu} i_{Du} + M_{Ru} i_{Fu} + KM_{Du} i_{du} \\
\lambda_{TQu} &= \lambda_{dQu} + \lambda_{mQu} = L_{dQu} i_{Qu} + L_{mQu} i_{Qu} + KM_{Qu} i_{qu}
\end{aligned} \tag{109}$$

Das equações 059, sabe-se que:

$$L_{mdu} = L_{mFu} = L_{mDu} = KM_{FU} = KM_{DU} = M_{RU}$$

$$L_{mqu} = L_{mQu} = KM_{QU}$$

As duas equações anteriores permitem que se escrevam as seguintes relações em pu:

$$L_{mdu} = KM_{Fu} = KM_{Du} = M_{Ru} = L_{id\,u} \tag{110}$$

$$L_{mqu} = L_{mQu} = KM_{Qu} = L_{iqu} \tag{111}$$

E criando os fluxos enlaçados associados a cada uma das indutâncias gerais das equações 110 e 111 vem que:

$$\lambda_{i\,du} = L_{i\,du} (i_{du} + i_{Fu} + i_{Du}) \tag{112}$$

$$\lambda_{i\,qu} = L_{i\,qu} (i_{qu} + i_{Qu}) \tag{113}$$

O significado físico das equações 112 e 113 pode ser representado considerando-se cada um dos eixos *d* e *q* como está mostrado na figura 5.

Para o circuito equivalente completo, devem-se levar em conta as equações em tensão 107, já considerada a condição de se estar trabalhando com um sistema equilibrado trifásico com as

resistências das fases do estator tomadas com o mesmo valor, assim como se tem procedido até aqui.

Para o eixo *d* pode-se escrever que:

$$v_{du} + r_u\, i_{du} + \frac{1}{\omega_B} \dot{\lambda}_{du} + \omega_u \lambda_{qu} = 0 \qquad (114)$$

Da primeira equação das equações 109 extrai-se a expressão para λ_{du} total, o que leva a seguinte expressão:

$$\dot{\lambda}_{Tdu} = L_{ddu}\, \dot{i}_{du} + L_{mdu}\, \dot{i}_{du} + KM_{Fu}\, \dot{i}_{Fu} + KM_{Du}\, \dot{i}_{Du} \qquad (115)$$

Assim, a expressão da tensão 114 para o eixo *d* tomará a seguinte forma:

$$v_{du} + r_u\, i_{du} + \frac{1}{\omega_B} L_{ddu}\, \dot{i}_{du} + \omega_u \lambda_{qu} + \frac{L_{idu}}{\omega_B} (\dot{i}_{du} + \dot{i}_{Fu} + \dot{i}_{Du}) = 0 \qquad (116)$$

De maneira similar, chega-se às equações de tensão para os demais enrolamentos.

Para o enrolamento de eixo *q* tem-se que:

$$v_{qu} + r_u\, i_{qu} + \frac{1}{\omega_B} L_{dqu}\, \dot{i}_{qu} - \omega_u \lambda_{du} + \frac{L_{iqu}}{\omega_B} (\dot{i}_{qu} + \dot{i}_{Qu}) = 0 \qquad (117)$$

Para o enrolamento de campo tem-se que:

$$-v_{Fu} + r_{Fu}\, i_{Fu} + \frac{1}{\omega_B} L_{dFu}\, \dot{i}_{Fu} + \frac{L_{idu}}{\omega_B} (\dot{i}_{du} + \dot{i}_{Fu} + \dot{i}_{Du}) = 0 \qquad (118)$$

Para os enrolamentos amortecedores *D* e *Q* têm-se:

$$v_{Du} = 0 \therefore Du\, i_{Du} + \frac{1}{\omega_B} L_{dDu}\, \dot{i}_{Du} + \frac{L_{idu}}{\omega_B} (\dot{i}_{du} + \dot{i}_{Fu} + \dot{i}_{Du}) = 0 \qquad (119)$$

$$v_{Qu} = 0 \therefore r_{Qu}\, i_{Qu} + \frac{1}{\omega_B} L_{dQu}\, \dot{i}_{Qu} + \frac{L_{iqu}}{\omega_B} (\dot{i}_{qu} + \dot{i}_{Qu}) = 0 \qquad (120)$$

As figuras 6 e 7 mostram os circuitos equivalentes de eixo *d* e eixo *q*, completos em tensão, respectivamente.

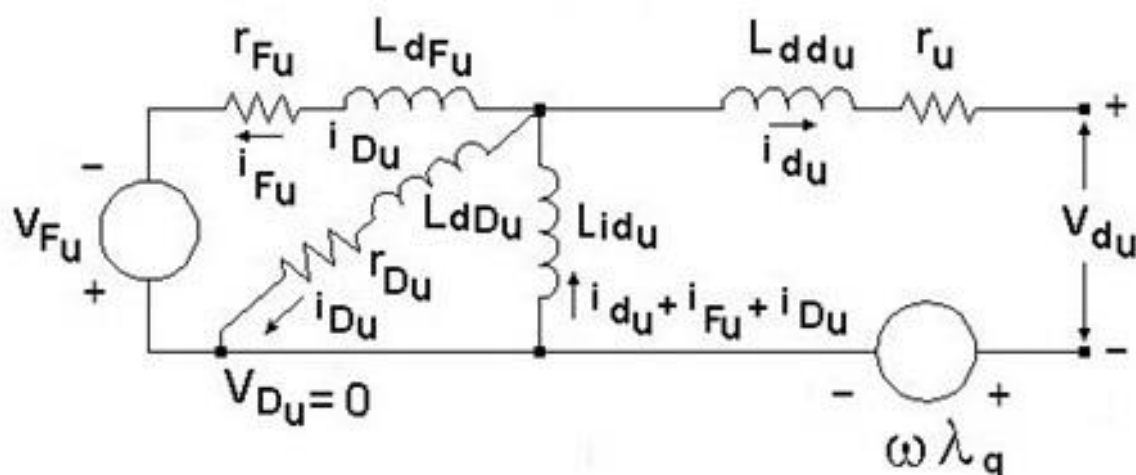



Figura 6 – Circuito PU Equivalente de Tensão da Máquina Síncrona para o Eixo d

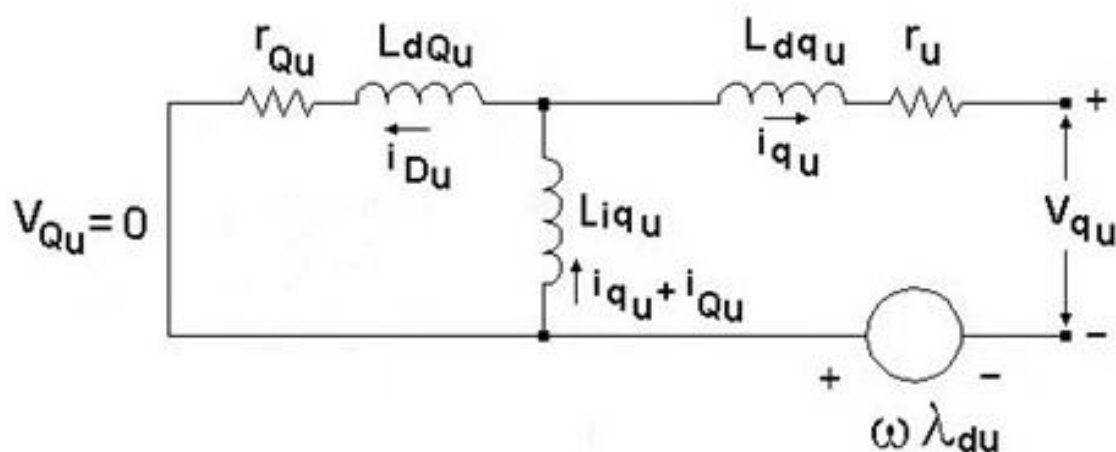



Figura 7 – Circuito PU Equivalente de Tensão da Máquina Síncrona para o Eixo q

2.12. Autoexcitação em Máquinas Síncronas

O fenômeno da autoexcitação em máquinas síncronas é um processo que pode ocorrer quando a máquina estiver conectada a um circuito elétrico de característica capacitiva.

Deste modo, qualquer tipo de dispositivo capacitivo que esteja acoplado à máquina síncrona pode vir a provocar esse fenômeno.

Para análise, será suposto o sistema mostrado na figura 8.

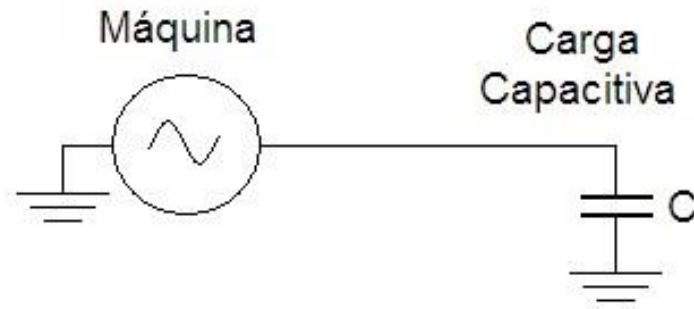



Figura 8 – Circuito Máquina Síncrona Conectada a uma Carga Capacitiva

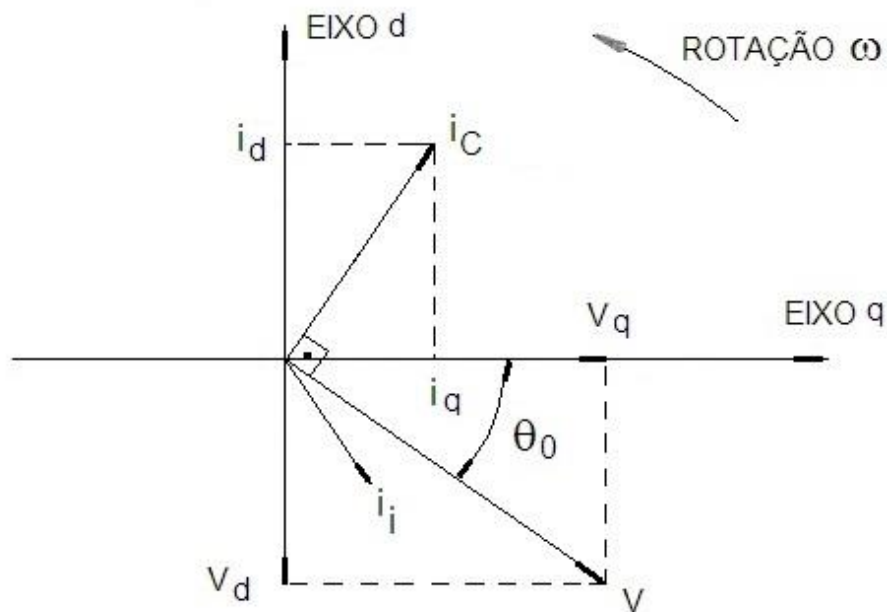



Figura 9 – Diagrama Vetorial para o Circuito Máquina Síncrona Conectada a uma Carga Capacitiva

No diagrama da figura 9 podem-se observar as grandezas envolvidas no processo sendo i_i a corrente circulante, quando o circuito aposentava apenas uma determinada carga indutiva, e sendo i_c a corrente capacitiva adiantada da tensão terminal *v* após a entrada da carga capacitiva.

O seguinte equacionamento básico é possível.

$$v_d = v\,sin(-\theta_0) = -v\,sin\theta_0$$

$$v_q = v\,cos(-\theta_0) = v\,cos\theta_0$$

Com

$$i_d = i_C\,sin(\pi/2 - \theta_0) = i_c\,cos\theta_0 \;\therefore\; cos\theta_0 = i_d / i_c$$

$$i_q = i_c\,cos(\pi/2 - \theta_0) = i_c\,sin\theta_0 \;\therefore\; sin\theta_0 = i_q / i_c$$

Considerando-se apenas a presença da carga capacitiva vem que:

$$\vec{v} = -j\, X_C\, i_C \;\therefore\; v = X_C\, i_C$$

Nota: a grandeza tensão *v* foi representada anteriormente na forma vetorial para indicar sua posição nos eixos *d-q*. Assim, as tensões v_d e v_q tomam a seguinte forma:

$$v_d = -v\left(\frac{i_q}{i_c}\right) = -\left(\frac{v}{i_c}\right) i_q = -(X_C)\, i_q = -X_C\, i_q$$
$$v_q = v\left(\frac{i_d}{i_c}\right) = \left(\frac{v}{i_c}\right)(i_d) = (X_C)\, i_d = X_C\, i_d \qquad (121)$$

Onde: $|X_C| = \frac{1}{\omega C}$ e $\sqrt{-1} = j$

Considerando o fluxo enlaçado pelo eixo *d*, através das equações 109, desconsiderando o enrolamento amortecedor, tem-se que:

$$\lambda_{du} = L_{du} i_{du} + KM_{Fu} i_{Fu} \qquad (122)$$

Para o fluxo enlaçado pelo campo, através das equações 109, desconsiderando o enrolamento amortecedor, tem-se que:

$$\lambda_{Fu} = L_{Fu} i_{Fu} + KM_{Fu} i_{du} \qquad (123)$$

Multiplicando a equação 123, membro a membro, pela relação $\frac{KM_{Fu}}{L_{Fu}}$ vem que:

$$\frac{KM_{Fu}}{L_{Fu}} \lambda_{Fu} = KM_{Fu} i_{Fu} + \frac{(KM_{Fu})^2}{L_{Fu}} i_{du} \qquad (124)$$

Considerando-se as referências 1 e 6, as seguintes relações são definidas:

$\frac{KM_{Fu}}{L_{Fu}} \lambda_{Fu} = \sqrt{3}\, E_{qu} = e_{qu}$ que é a fem instantânea da máquina síncrona para a condição operação em vazio;

$\frac{KM_{Fu}}{r_{Fu}} v_{Fu} = KM_{Fu}\, i_{Fu} = \sqrt{3}\, E_{fd} = e_{fd}$ que é a tensão instantânea de campo da máquina síncrona;

$L_{du} - L'_{du} = \frac{(KM_{Fu})^2}{L_{Fu}}$ que é uma relação primordial.

A partir das relações primordiais anteriores, a equação 124 tomará o seguinte aspecto:

$$e_{qu} = KM_{Fu} i_{Fu} + L_{du}\, i_{du} - L'_{du}\, i_{du} \quad (125)$$

Considerando-se agora a equação 123, a equação 125 poderá ser reescrita da seguinte forma:

$$e_{qu} = \lambda_{du} - L'_{du}\, i_{du}$$

Passando a equação anterior para valores atuais, e considerando que $\omega = \omega_B$, vem que:

$$e_q = \omega \lambda_d - \omega L'_d\, i_d \quad (126)$$

Das equações 101 e 102 obtêm-se as seguintes expressões para as tensões v_d e v_q, desprezando-se as resistências envolvidas.

$$\begin{aligned} v_d &= -\omega \lambda_q \\ v_q &= \omega \lambda_d \end{aligned} \quad (127)$$

Das equações 121, a partir das equações 127, conclui-se que:

$$\begin{aligned} \omega \lambda_d &= X_C\, i_d \\ \omega \lambda_q &= X_C\, i_q \end{aligned} \quad (128)$$

Assim, a equação 126 tomará a seguinte forma:

$$e_q = X_C\, i_d - \omega L'_d\, i_d \quad (129)$$

O que, finalmente, conduz ao seguinte valor da corrente i_d:

$$i_d = \frac{\omega C}{1 - \omega^2 L'_d\, C}\, e_q \quad (130)$$

Se o mesmo raciocínio for levado em consideração para um determinado enrolamento de eixo q, onde todas as condições forem respeitadas, a seguinte expressão para a corrente i_q será obtida:

$$i_q = \frac{\omega C}{1 - \omega^2 L'_q\, C}\, e_d \quad (131)$$

A equação 104 fornece a expressão em por unidade da tensão de campo, onde a resistência de campo é considerada, o que permite que se escreva a seguinte expressão, considerando-se o fluxo através do campo da máquina síncrona:

$$v_{Fu} - r_{Fu} i_{Fu} - \dot{\lambda}_{Fu} = 0 \qquad (132)$$

Na equação 132, mais precisamente no termo da derivada do fluxo, a parcela $1/\omega_B$ foi incorporada à variável $\dot{\lambda}_{Fu}$, o que garante estar a variável tempo sendo dada em segundos.
O valor do fluxo enlaçado no campo da máquina síncrona será dado por:

$$\lambda_{Fu} = r_{Fu} \int_0^t \left(\frac{v_{Fu}}{r_{Fu}} - i_{Fu} \right) dt \qquad (133)$$

Multiplicando a equação 133, membro a membro, pela relação $\frac{KM_{Fu}}{L_{Fu}}$ vem que:

$$\frac{KM_{Fu}}{L_{Fu}} \lambda_{Fu} = \frac{r_{Fu}}{L_{Fu}} \int_0^t \left(KM_{Fu} \frac{v_{Fu}}{r_{Fu}} - KM_{Fu} i_{Fu} \right) dt$$

Considerando as relações primordiais e sabendo-se da referência 1 que $T'_{do} = \frac{L_{Fu}}{r_{Fu}}$ é a constante de tempo transitória de eixo direto a circuito aberto do estator da máquina síncrona , vem que:

$$e_{qu} = \frac{1}{T'_{do}} \int_0^t (e_{fdu} - KM_{Fu} i_{Fu}) dt \qquad (134)$$

Trazendo na equação anterior 134 a expressão para $KM_{Fu} i_{Fu}$, da equação 125, obtém-se a seguinte expressão mais geral:

$$e_{qu} = \frac{1}{T'_{do}} \int_0^t \{ e_{fdu} - [e_{qu} - (L_{du} - L'_{du}) i_{du}] \} dt \qquad (135)$$

Passando a equação 135 para valores atuais obtém-se que:

$$e_q = \frac{1}{T'_{do}} \int_0^t \{ e_{fd} - [e_q - \omega (L_d - L'_d) i_d] \} dt$$

Ou ainda:

$$\frac{e_q}{\omega} = \frac{1}{T'_{do}} \int_0^t \{ \frac{e_{fd}}{\omega} - [\frac{e_q}{\omega} - (L_d - L'_d) i_d] \} dt \qquad (136)$$

Trazendo na equação 136 a expressão da corrente i_d, da equação 130, tem-se que:

$$\frac{e_q}{\omega} = \frac{1}{T'_{do}} \int_0^t \{ \frac{e_{fd}}{\omega} - [\frac{e_q}{\omega} - (L_d - L'_d)(\frac{\omega C}{1-\omega^2 L'_d C} e_q)] \} dt$$

Ordenando a equação anterior segundo cada membro e passando o resultado para o plano complexo da transformada de Laplace, sendo *S* operador complexo, obtém-se que:

$$\frac{1}{\omega} e_{q(S)} = \frac{1}{T'_{do}} \frac{1}{S} [\frac{1}{\omega} e_{fd(S)} - \frac{1}{\omega} e_{q(S)} + (L_d - L'_d)(\frac{\omega C}{1-\omega^2 L'_d C} e_q (S)]$$

Rearranjando-se a equação anterior vem:

$$e_{q(S)} [\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega T'_{do} S} - \frac{(L_d - L'_d)\omega C}{T'_{do} S(1-\omega^2 L'_d C)}] = \frac{1}{\omega T'_{do} S} e_{fd(S)}$$

Multiplicando a equação anterior pelo fator $\omega T'_{do} S$ obtém-se que:

$$e_{q(S)} [1 + T'_{do} S - (L_d - L'_d)(\frac{\omega^2 C}{1-\omega^2 L'_d C}] = e_{fd(S)}$$

As operações subseqüentes permitem que se chegue à função de transferência $\frac{e_{q(S)}}{e_{fd(S)}}$. Assim, resolvendo a equação anterior, tem-se que:

$$e_{q(S)} [S + \frac{1-\omega^2 L_d C}{T'_{do}(1-\omega^2 L'_d C)}] = \frac{1}{T'_{do}} e_{fd(S)} + e_{q(0)} \qquad (137)$$

Para condições inicias nulas, vem que:

$$\frac{e_{q(S)}}{e_{fd(S)}} = \frac{\frac{1}{T'_{do}}}{S + \frac{1-\omega^2 L_d C}{T'_{do}(1-\omega^2 L'_d C)}} \qquad (138)$$

Se for considerada a existência de condições inicias diferentes de zero, *eq(0)*, então a seguinte equação representará o problema em questão:

A equação 138 traz, finalmente, a função de transferência entre as tensões de campo e_{fd} e a tensão de excitação e_q quando do carregamento da máquina síncrona por cargas capacitivas, considerando-se o eixo *q*. Trata-se de uma função de transferência de primeira ordem com um pólo real cujo valor depende dos parâmetros envolvidos no processo.
É evidente que a combinação de valores entre os parâmetros pode designar a existência de um pólo positivo ou um pólo negativo na função de transferência no plano complexo de Laplace o que terá uma influência importante na questão da presença ou não de sobretensão no campo. A questão torna-se crítica quando o valor do pólo for negativo o que denota, pela equação 138, que a resposta no domínio do tempo do sistema será regida por uma exponencial crescente o que representará, fisicamente, a presença de sobretensões elevadíssimas.

Para o caso do eixo *d*, considerando-se os cálculos efetuados até aqui, a seguinte equação poderá ser obtida por analogia ao cálculo anterior verificado no eixo *q*, equação 136:

$$\frac{e_d}{\omega} = \frac{1}{T'_{do}} \int_0^t \{-[\frac{e_d}{\omega} - (L_q - L'_q)\, i_q]\}\, dt \qquad (139)$$

Na equação 139, notar que, em relação à equação 136 anterior, a tensão de campo de eixo *q* não existe.

A solução da equação 139 seguirá o mesmo procedimento que foi verificado na solução da equação 136. Assim, tem-se que:

$$e_{d(S)}\, [S + \frac{1-\omega^2 L_q C}{T'_{qo}\,(1-\omega^2 L'_q\, C)}] = e_{d(0)} \qquad (140)$$

Onde:

$$e_{d(S)} = \frac{1}{S + \frac{1-\omega^2 L_q C}{T'_{qo}\,(1-\omega^2 L'_q\, C)}}\, e_{d(0)} \qquad (141)$$

Nota: A questão da solução das equações 137 e 140 tem a ver com a forma que a solução de um circuito elétrico admite, no domínio da transformada complexa de Laplace, quando existem condições iniciais no sistema em processamento.

2.13. Análise da Autoexcitação em Máquinas Síncronas e Conclusões

Pelo que foi determinado no item anterior é possível estabelecer as faixas para os limites de valores dos parâmetros da máquina síncrona em função da questão da sobretensão originária no fenômeno da autoexcitação provocado pela interação entre os parâmetros de máquina *versus* os parâmetros relativos à carga e, por conseguinte, interferindo com a parte de transmissão do sistema.

Considerando que, para haver sobretensão, o pólo da função de transferência $\frac{e_{q(S)}}{e_{fd(S)}}$ deve ser negativo, as seguintes hipóteses são consideradas.

Primeira hipótese, com base na equação 138:

$$1-\omega^2 L_d C<0 \quad e \quad 1-\omega^2 L'_d C>0$$

$$1-\omega^2 L_d C<0 \quad \therefore \quad \frac{1}{\omega C}<\omega L_d$$

$$1-\omega^2 L'_d C>0 \quad \therefore \quad \frac{1}{\omega C}>\omega L'_d$$

Ou seja

$$\omega L'_d<\frac{1}{\omega C}<\omega L_d \tag{142}$$

Segunda hipótese, com base na equação 138:

$$1-\omega^2 L_d C>0 \quad e \quad 1-\omega^2 L'_d C<0$$

$$1-\omega^2 L_d C>0 \quad \therefore \quad \frac{1}{\omega C}>\omega L_d$$

$$1-\omega^2 L'_d C<0 \quad \therefore \quad \frac{1}{\omega C}<\omega L'_d$$

Ou seja

$$\omega L_d<\frac{1}{\omega C}<\omega L'_d \tag{143}$$

Como se sabe, em termos de máquina síncrona, a impedância de regime permanente ou síncrona X_d será sempre maior que a impedância a essa associada de regime transitório X'_d, fato que inviabiliza a segunda hipótese.

Estendendo a análise para o caso em que se foque o eixo d a seguinte condição deverá ser verificada:

$$\omega L'_q < \frac{1}{\omega C} < \omega L_q \tag{144}$$

A equação 143 estipula a faixa de valores para a reatância capacitiva relativamente aos valores das reatâncias de eixo direto transitória e de regime permanente onde a possibilidade de ocorrência do fenômeno de autoexcitação no enlace do fluxo de eixo direto é passível de ocorrer.

De modo semelhante, a equação 144 estipula a faixa de valores para a reatância capacitiva relativamente aos valores das reatâncias de eixo quadratura transitória e de regime permanente para o caso em que haveria sobretensão pelo efeito de autoexcitação.

O fenômeno vem então associado ao crescimento exponencial da tensão de excitação da máquina síncrona o que pode trazer danos severos ao conjunto elétrico independente da atuação rápida do sistema automático de excitação.

3. Considerações Finais

Pelo que foi exposto, torna-se importante o conhecimento dos parâmetros que vão representar a carga que estará conectada à máquina síncrona. Existem situações em que determinados arranjos são possíveis em função da abertura de determinadas linhas de transmissão ou mesmo situações de baixa carga em que a carga capacitiva torna-se relevante. Nesses casos é interessante analisar todos os arranjos possíveis determinando o valor da carga capacitiva equivalente no sentido de se evitar o fenômeno da autoexcitação. Outro ponto que também deverá ser observado são os esquemas em que são utilizados compensadores capacitivos no sentido de controlar os níveis de tensão. Tais compensadores, dependendo do tamanho, podem concorrer diretamente para culminar com o fenômeno da autoexcitação.

REFERÊNCIAS

[1] P.M. ANDERSON & A.A. FOUAD, Po□er System Control and Stability, Ames, Iowa, USA, The Iowa State University Press, 1982.

[2] O.I. ELGERD, Introdução à Teoria de Sistemas de Energia Elétrica, Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda., São Paulo, 1976.

[3] E.W. KIMBARK, Synchronous Machines, Dover Publications, Inc., New York, 1958.

[4] A.E. FITZGERALD & J.R. KINGSLEY & A. KUSKO, Electric Machinery, The McGraw-Hill, New York, 1961.

[5] C. CONCORDIA, Synchronous Machines, John Wiley & Sons, New York, USA, 1951.

[6] L.R. GOMES & C.H.F. Da Silva, Sistemas de Regulação e Controle Automático de Usinas de Energia Elétrica, e-book link https://archive.org/details/SistemasDeRegulaoEControleAutomticoDeUsinasDeEnergiaEltrica, 2018.

[7] P.M. ANDERSON, Analysis of Faulted Power System, Ames, Iowa, USA, The Iowa State University Press, 1976.

[8] W. A. LEWIS, A Basic Analysis of Synchronous Machines, Pt. 1 , AIEE Transactions, PAS 77: Pages 436-455, 1958.

O fenômeno de autoexcitação em máquinas síncronas tem por razão os efeitos de ressonância elétrica aos quais estes equipamentos ficam sujeitos em função da presença de cargas indutivas associadas a cargas capacitivas.